Análisis de Fourier

Jaime Luque Quispe [1], Martha Vilca Chaicha[2]
Escuela de Ingeniería Electrónica, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú
[1]04190236@unmsm.edu.pe , [2] mvilcac@unmsm.edu.pe

ABSTRACT

In this article we study the Fourier series, and the Fourier transform of infinitely differentiable real functions with all its derivatives rapidly decreasing. We also provide examples of some of the most important applications of Fourier analysis to several branches of mathematics and physics.
Keywords: The isomorphism theorem, Fourier series, Fourier transform, Parseval identity, Plancherel identity, Schwartz functions.

INTRODUCCIÓN

En 1807, Fourier, establece en los trabajos presentados en el instituto de Francia que: cualquier señal periódica puede ser representada por una serie de sumas trigonométricas en senos y cosenos relacionadas armónicamente. Los argumentos establecidos por Fourier eran imprecisos y en 1829 Dirichlet proporcionó las condiciones precisas para que una señal periódica pueda ser representada por una serie de Fourier. Fourier obtuvo además, una representación para señales no periódicas, no como suma de senoides relacionadas armónicamente, sino como integrales de senoides, las cuales no todas están relacionadas armónicamente. Al igual que las series de Fourier, la integral de Fourier, llamada Transformada de Fourier, es una de las herramientas más poderosas para el análisis de sistemas LTI (Sistema Lineal Invariante en el Tiempo).

Visto esto, la idea básica de las series de Fourier es que toda función periódica de periodo T puede ser expresada como una suma trigonométrica de senos y cosenos del mismo periodo T. El problema aparece naturalmente en astronomía, de hecho Neugebauer (1952) decubrió que los Babilonios utilizaron una forma primitiva de las series de Fourier en la predicción de ciertos eventos celestiales. La historia moderna de las series de Fourier comenzó con D'Alembert (1747) y su tratado de las oscilaciones de las cuerdas del violín. El desplazamiento u = u(t,x) de una cuerda de violín, como una función del tiempo t y de la posición x, es solución de la ecuación diferencial.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$$

Sujeto a las condiciones iniciales:

$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \text{ para } t \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < 1$$

La solución de este problema es la superposición de dos ondas viajando en direcciones opuestas a la velocidad 1, como lo expresa la fórmula de D'Alembert:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t)$$

En la cual f es una función impar de periodo 2 que se anula en los puntos $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Euler en 1748 propuso que tal solución podía ser expresada en una serie de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \sin n\pi x$$

Y como consecuencia:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n) \cos n\pi t \, \sin n\pi x$$

Las mismas ideas fueron expuestas por D. Bernoulli (1953) y Lagrange (1759)

$$\hat{f}(n) = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

Para calcular los coeficientes apareció por primera vez en un artículo escrito por Euler en 1777.

La contribución de Fourier comenzó en 1807 con sus estudios del problema del flujo del calor.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Presentado a la Academie des Sciences en 1811 y publicado en parte como la célebre Theorie analytique de la chaleur en 1822. Fourier hizo un intento serio por demostrar que cualquier función diferenciable puede ser expandida en una serie trigonométrica. Una prueba satisfactoria de este hecho fue dada por Dirichlet en 1829. Riemann también hizo contribuciones importantes al problema.

Modernamente el análisis de Fourier ha sido impulsado por matemáticos de la talla de Lebesgue, Hardy, Littlewood, Wiener, Frobenius, Selberg, Weil y Weyl entre otros.

ESPACIOS DE HILBERT

Definiciones

1. Un espacio euclídeo es un espacio vectorial complejo H junto con una función que asocia a cada par ordenado de elementos x,y que pertenecen a H un numero complejo (x,y), llamado producto interior de x e y, de manera tal que se verifican las siguientes condiciones:

1. $(x,y) = \overline{(y,x)}$, *(la barra denota conjugación compleja).*
2. $(x+y,z) = (x,z)+(y,z)$, *para todo* $x,y,z \in \mathbf{H}$.
3. $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$, *para todo* $x,y \in \mathbf{H}$ *y para todo escalar* α.
4. $(x,x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbf{H}$.
5. $(x,x) = 0$ *sólo si* $x = 0$.

En virtud de la propiedad 4, se puede definir la norma de un vector x de H mediante la fórmula $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

Se satisfacen las siguientes relaciones:

Desigualdad de Schwarz: $x, y \in \mathbf{H},\ |(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$

Desigualdad Triangular: $x, y \in \mathbf{H},\ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Si se define la distancia entre x e y mediante

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Se tiene ahora que H es un espacio métrico.

2. Un espacio métrico Euclídeo H recibe el nombre de espacio de Hilbert si toda sucesion de cauchy converge en H, es decir, si H es completo con la métrica inducida por el producto interno.

3. Sea H un espacio métrico de Hilbert. Si $(x,y) = 0$ Para ciertos x e y que pertenecen a H, decimos que x es ortogonal a y. Tenemos que la ortogonalidad es una relación simétrica. Un conjunto de vectores u_α en H, donde α recorre algún conjunto de índices de A, se llama ortonormal si se satisfacen las condiciones de ortogonalidad $(u_\alpha, u_\beta) = 0$ para todo $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \neq \beta$, y si esta normalizado de modo que $\|u_\alpha\| = 1$ para cada $\alpha \in A$. En otras palabras $\{u_\alpha\}$ es ortonormal si:

$$(u_\alpha, u_\beta) = \begin{cases} 1, & si\ \alpha = \beta \\ 0, & si\ \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Si $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ es ortonormal, se asocia a cada x que pertence a H, una función compleja $\hat{x}$ sobre el conjunto de indices de A, definidad mediante:

$$\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha) \quad (\alpha \in A)$$

Los números $\hat{x}(\alpha)$ se llaman se llaman los coeficientes de Fourier de x relativos al conjunto $\{u_\alpha\}$.

Los cuatro Teoremas siguientes establecen algunas de las propiedades más importantes de los conjuntos ortonormales y los coeficientes de fourier en espacios de Hilbert.

Teorema 1: En un espacio de Hilbert todo conjunto ortonormal es linealmente Independiente.
Teorema 2: Sea H un espacio de Hilbert. Se supondra que $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ es un conjunto ortonormal con A a lo sumo numerable. Entonces para todo x que pertenece a H se satisface la siguiente desigualdad:

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$$

Desigualdad de Bessel

Teorema 3: Sea $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ un conjunto Ortonormal en H con A numerable. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\{u_\alpha\}$ *es un conjunto ortonormal maximal en* $\mathbf{H}$.
2. *El conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de* $\{u_\alpha\}$ *es denso en* $\mathbf{H}$.
3. *Para todo* $x \in \mathbf{H}$, $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2$ *(Identidad de Plancherel).*
4. *Si* $x, y \in \mathbf{H}$, *entonces* $(x,y) = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha)\overline{\hat{y}(\alpha)}$ *(Identidad de Parseval).*

Teorema 4: Es el llamado Teorema del Isomorfismo. Si u1,u2,u3,… es una base en H entonces la aplicación $x \mapsto \hat{x}(n)$ es un isomorfismo entre H y el espacio L_2 formado por el conjunto de todas las sucesiones de cuadrado sumable. Este teorema establece que todos los espacios de Hilbert de dimensión infinita que posean una base ortonormal numerable son isomorfos.

GEOMETRICA EN $L^2(I)$

El espacio $L^2(I)$ se define como la clase de todas las funciones complejas medibles en el intervalo I que pertenece a R que satisfacen:

$$\left(\int_I |f|^2\right)^{1/2} < \infty$$

Para f y g que pertenecen a $L^2(I)$ de define:

$$(f,g) = \int_I f\overline{g}.$$

Por lo tanto:

$$|(f,g)| \leq \int_I |f\overline{g}| = \int_I |f||g| \leq \int_I \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2) < \infty$$

La formula define a un numero complejo. Se puede verificar que esta formula define un producto interno en $L^2(I)$ y que, con la norma inducida por dicho producto interno $L^2(I)$ es un espacio metrico completo, es decir $L^2(I)$ es un espacio de Hilbert de acuerdo con la definición 2.

Si A y B son intervalos disjuntos de I entonces:

$$(\chi_A, \chi_B) = \int_I \chi_A \overline{\chi_B} = \int_I \chi_{A\cap B} = 0$$

Donde χ_A y χ_B son las funciones características de los conjuntos A y B, respectivamente. En consecuencia existe un conjunto ortogonal infinito, lo cual implica, en virtud del teorema 1 que $L^2(I)$ es de dimensión infinita.

FUNCIONES DE CUADRADO SUMABLE EN EL CIRCULO Y SUS SERIES DE FOURIER

En esta sección del trabajo se hace mencion al espacio $L_2(S^1)$, donde S^1 denota la circunferencia unidad. El espacio S^1 puede interpretarse como el intervalo unidad $0 \leq x \leq 1$ con los extremos 0 y 1 indentificados.

Las funciones definidas en S^1 pueden verse como funciones de variable real periódicas de periodo 1.

$$f(x+1) = f(x)$$

El espacio $L_2(S^1)$ es el espacio de Hilbert de todas las funciones complejas medibles en f definidas en S^1 que satisfacen:

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2} < \infty$$

En este espacio el producto métrico esta definido por:

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

TRANSFORMADAS DE FOURIER

Las funciones de Schwarz son aquellas funciones definidas en R que son infinitamente diferenciables y rapidamente convergentes a cero. Más formalmente:

Definición 4: Una función f se llama función de Schwarz si $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ y $\lim_{|x|\to\infty}(1+x^2)^k f^{(p)} = 0$, para todo par de enteros no negativos k y p. En la notación planteada $f^{(0)} = f$.

Equivalentemente f es una función de Schwarz si $\lim_{|x|\to\infty} P(x) f^{(n)}(x) = 0$ para todo enterno no negativo n y para todo polinomio P(x).

El conjunto formado por todas las funciones de Schwarz se denota por S(R).

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset \mathrm{L}^1(\mathbf{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbf{R})$$

Se puede demostrar tambien que S(R) es denso en $L^1(R)$ y $L^2(R)$.

Definición 5: Para f y g que pertenecen a S(R) se define:

$$\hat{f}(\gamma) = \int f(x)\exp(-2\pi inx\gamma)\,dx$$

Se llama Transformada de Fourier de f, y:

$$\check{f}(x) = \int f(\gamma)\exp(2\pi i\gamma x)\,d\gamma$$

Se llama Transformada Inversa de Fourier de f.

Teorema:

1. *La aplicación $f \mapsto \hat{f}$ es lineal y biyectiva de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ en sí mismo.*
2. *$\check{\hat{f}} = f$, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$,*
3. *$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.*

Definición 6: Para f,g que pertenecen a $L^1(R)$, se define la convolución mediante:

$$(f \circ g)(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy.$$

Teorema:

Para cualquier función en L1(R) la transformada de Fourier

$$\hat{f}(\gamma) = \int f(x)\exp(-2\pi i\gamma x)\,dx$$

Existe como una integral de Lebesgue ordinaria y satisface las siguientes propiedades:

1. $\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$.
2. $\hat{f} \in C(\mathbf{R})$.
3. $\lim_{|\gamma|\to\infty} \hat{f}(\gamma) = 0$.
4. $\widehat{(f \circ g)} = \hat{f}\hat{g}$.
5. $\hat{f} = 0$ *si y sólo si* $f = 0$.

APLICACIONES

ECUACIÓN DE ONDAS

La ecuación de Ondas viene dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

Con condiciones de borde:

$$\lim_{t\to 0} u = f \text{ y } \lim_{t\to 0} \frac{\partial u}{\partial t} = g.$$

El procedimiento para resolver esta ecuación, es familiar. Aplicando la Transformada de Fourier:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -4\pi^2\gamma^2\hat{u}$$

Después encontramos u:

$$\hat{u}(t,\gamma) = \cos 2\pi\gamma t\, \hat{f}(\gamma) + \frac{\sin 2\pi\gamma t}{2\pi\gamma}\hat{g}(\gamma)$$

$$= \frac{1}{2}[e^{2\pi i\gamma t} + e^{-2\pi i\gamma t}]\hat{f}(\gamma) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} e^{2\pi i\gamma y}\, dy\ \hat{g}(\gamma)$$

Luego la Transformada Inversa de Fourier:

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy.$$

Ésta es la llamada formula de D'Alembert.

TEMPERATURA DE LA TIERRA

Un problema sencillo pero muy interesante es del cálculo de la temperatura de la tierra a x a partir de la temperatura de la superficie.
Se describe la temperatura de la superficie terrestre como una funcion f, periódica en el tiempo t y de periodo 1(un año).

La temperatura u(t,x) en el tiempo $t \ge 0$ y profundidad $x > 0$ es también periódica en t y es natural asumir que $|u| \le \|f\|_\infty$. Bajo esas circunstancias u(t,x) puede ser expandida mediante una serie de Fourier para cada $0 \le x < \infty$ como sigue:

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(x) e^{2\pi int}$$

Con coeficientes de Fourier:

$$c_n(x) = \int_0^1 u(t,x) e^{-2\pi int}\, dt.$$

Se sabe también que la función u satisface la ecuación diferencial del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

Por lo tanto:

$$c_n'' = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) e^{-2\pi int}\, dt = 2\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) e^{-2\pi int}\, dt = 4\pi inc_n$$

En otras palabras, los coeficientes Cn satisfacen:

$$c_n'' = [(2\pi|n|)^{1/2}(1 \pm i)]^2 c_n$$

Tomando el signo positivo o negativo de acuerdo a que si n>0 o n<0. Por otra parte se sabe además que:

$$c_n(0) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi int}\, dt = \hat{f}(n).$$

Resolviendo la Ecuación se tiene que:

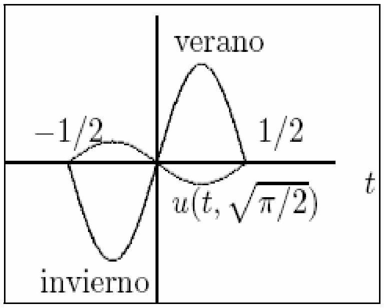
$$c_n(x) = \hat{f}(n) \exp[-(2\pi|n|)^{1/2}(1 \pm i)x]$$

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) \exp[-(2\pi|n|)^{1/2}x] \exp[2\pi int \mp (2\pi|n|)^{1/2} ix]$$

Supongamos que la temperatura de la tierra viene dada por una funcion sinusoidal $f(t) = \sin(2\pi t)$ (Lo cual significa que la temperatura anual media $\hat{f}(0) = \int_0^1 f$ es cero) . En este caso la función u vendrá dada por:

$$u(t,x) = \exp(-\sqrt{2\pi}x)\sin(2\pi t - \sqrt{2\pi}x)$$

Esta fórmula nos dice que la temperatura a una profundidad de $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ queda afectada por el factor $e^{-\pi}$ y esta completamente fuera de fase con respecto a las estaciones como lo indica la siguiente gráfica.



SERIES DE FOURIER

A primera vista, parece que el problema de analizar formas de ondas complejas representa una tarea formidable. Sin embargo, si la forma de la onda es periódica, se puede representar con una precisión arbitraria, mediante la superposición de un número suficientemente grande de ondas senoidales que forman una serie armónica.
Toda función f(t) periódica de periodo P, se puede representar en forma de una suma infinita de funciones armónicas, es decir:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i \cos(i\omega t) + b_i \sin(i\omega t) \right)$$

Donde el periodo P=2p/w, y a0 a1 ...ai ... y b1 b2 .... bi .... Son los denominados coeficientes de Fourier.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t)\,dt$$

$$a_i = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t)\cos(i\omega t)\,dt \qquad i = 1,2,3\ldots$$

$$b_i = \frac{2}{P} \int_{-P/2}^{P/2} f(t)\sin(i\omega t)\,dt \qquad i = 1,2,3\ldots$$

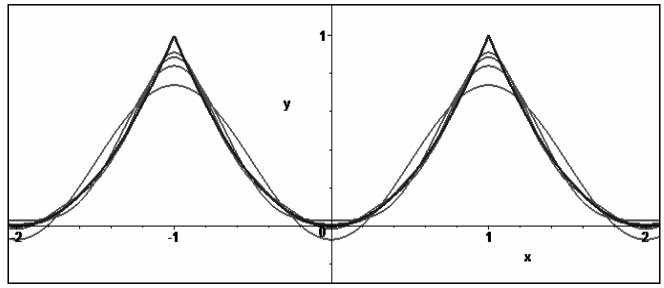
APLICACIONES DE LAS SERIES DE FOURIER

-Generación de formas de onda de corriente o tensión eléctrica por medio de la superposición de senoides generados por osciladores electrónicos de amplitud variable cuyas frecuencias ya están determinadas.
-Análisis en el comportamiento armónico de una señal
-Reforzamiento de señales.
-Estudio de la respuesta en el tiempo de una variable circuital eléctrica donde la señal de entrada no es senoidal o cosenoidal, mediante el uso de transformadas de Laplace y/o Solución en régimen permanente senoidal en el dominio de la frecuencia.

ALGUNAS GRÁFICAS HECHAS EN MATLAB

I. $\mathbf{f}(x) = x^2$ En el intervalo unitario

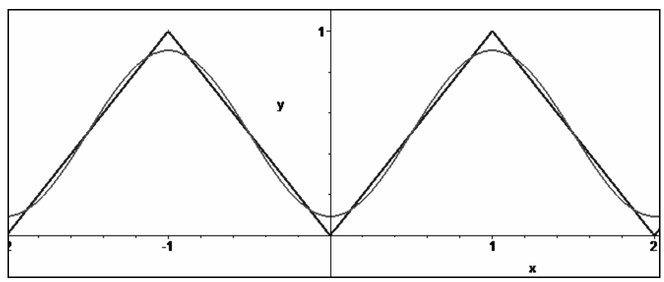
$$x^2 \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \left(-\cos(\pi x) + \frac{\cos(2\pi x)}{2^2} - \frac{\cos(3\pi x)}{3^2} + \ldots \right)$$



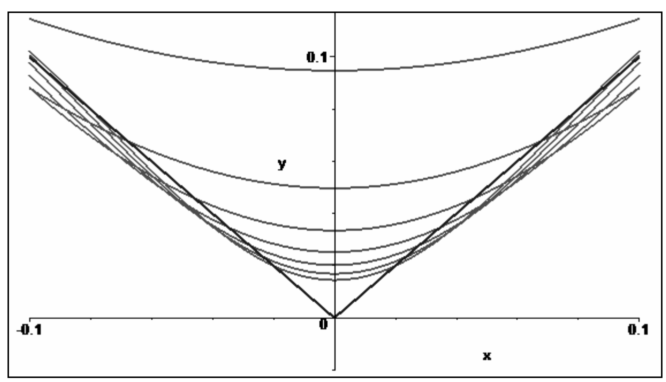
2. $\mathbf{f}(x) = |x|$ Función definida en [-L,+L], de periodo 2L.

$$|x| \sim \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \left[\frac{1}{9}\right]\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \left[\frac{1}{25}\right]\cos\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \ldots \right)$$

En el caso de T=2, se tiene la siguiente Gràfica:



De aquí, realizando un Zoom sobre el vértice del origen:



REFERENCIAS

[1]. MITOPENCOURSEWARE : MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY
Web Site: http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Mathematics/18-103Spring2004/CourseHome/
Acceso: Setiembre 2007.

[2]. Departamento de Matemàticas, Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Madrid
AFA (Anàlisis Fourier Aplicaciones)
Web site:
http://www.uam.es/departamentos/ciencias/matematicas/AFA/AFA2004/seminar.html
Acceso: Setiembre 2007

[3]. The Mathworks (Matlab Versiòn 7.4)
Web site: www.themathworks.com