

CALCULO DE VIBRACIONES MECÁNICAS POR MÉTODOS MATRICIALES

Gerardo González Filgueira^a, César A. Vidal Feal^b

^a)Dr. Ingeniero en Informática. Departamento. Ingeniería Industrial. Escuela Politécnica Superior. Universidad de La Coruña. C/Mendizábal s/n. 15403 Ferrol (A Coruña). España.

Tel: 981337400, Ext. 3282, e-mail gerardog@udc.es.

^b) Ing. T. Naval. Departamento. Ingeniería Industrial. Escuela Universitaria Politécnica. Universidad de La Coruña. Avda. 19 de Febrero s/n. 15405. Ferrol. (A Coruña). España.

Tel: 981337400, Ext. 3072, e-mail ceanvife@udc.es.

RESUMEN: En el presente artículo se revisan las ecuaciones básicas que describen las vibraciones de una masa puntual. Se resumen las tres situaciones posibles: sometidas a fuerzas elásticas, de amortiguamiento y externas. A continuación, se deducen las ecuaciones que describen las vibraciones en sistemas multimasa, adoptándose el método matricial de diagonalización para la resolver el sistema resultante. Finalmente, a modo de ejemplo, se aplica el procedimiento a una viga en voladizo, idealizada como un conjunto de masas puntuales, y se analizan los resultados obtenidos.

PALABRAS CLAVE: Vibraciones mecánicas, Métodos Matriciales, Frecuencias propias.

ABSTRACT: The present paper begins analyzing the basic equations that describe the vibration of a punctual mass. Three possible situations are studied: submitted to elastic forces, to damping forces and to external forces. Next, the equations for the calculation of vibrations in multimass systems are deduced. The matrix diagonalizing method for the resolution of the equations is described. Finally, as example, the procedure is applied to cantilever beam, and the results are discussed.

KEY-WORDS: Mechanical vibrations, Matrix methods, Natural frequency.

SUMARIO: 1. Introducción, 2. Ecuaciones que rigen las vibraciones en sistemas monomasa, 2.1. Vibración libre, 2.2. Vibración amortiguada, 2.3 Vibración amortiguada y forzada, 2.4. Solución para un sistema libre, 2.5. Solución para un sistema amortiguado, 2.6. Solución para un sistema forzado, 2.7. Conclusiones, 3. Análisis de vibraciones libres en sistemas multimasa, 3.1. Introducción, 3.2. Conclusiones, 4. Análisis de en sistemas multimasa con amortiguamiento y Fuerza perturbadora, 5 Aplicación del métodos matricial al estudio de las frecuencias propias de una viga en voladizo, 6. Resultados, 7. Conclusiones, 8. Bibliografía.

SUMMARY: 1. Introduction, 2. Equations governing vibrations in monomass systems, 2.1. Vibration-free, 2.2. Vibration damped, 2.3 Vibration damped and forced 2.4. Solution for a free system, 2.5. Solution for a damped system, 2.6. Solution for a forced system, 2.7. Conclusions 3. Free vibration analysis systems multimass, 3.1. Introduction 3.2. Conclusions, 4. Analysis of damped systems multimass and disruptive force, 5 Application of matrix methods to the study of the natural frequencies of a cantilever beam, 6 . Results 7. Conclusions, 8. References.

1. Introducción

Los métodos matriciales son una técnica muy frecuente para resolver sistemas de ecuaciones. Los sistemas de ecuaciones surgen con frecuencia en los cálculos de ingeniería; por ejemplo en redes eléctricas, estructuras metálicas, redes de tuberías, etc. Además, los métodos matriciales están íntimamente relacionados con los métodos por elementos finitos, hoy día tan en auge. Muchos programas de ingeniería asistida por ordenador (CAE), utilizan el cálculo matricial. Parece procedente, por tanto, revisar estos procedimientos de cálculo que tan frecuentemente se deja en manos de software especializado.

En la primera parte del trabajo se revisan las ecuaciones matemáticas que rigen las vibraciones mecánicas básicas. El método matricial permite calcular las frecuencias propias del sistema, así como las amplitudes de vibración de cada una de las masas en que se ha idealizado. Uno de los aspectos más positivos del método, a nuestro juicio, es que aporta una buena comprensión de los fenómenos de vibraciones en sistemas multimasas. Se presta especial atención a la interpretación física de las ecuaciones y resultados.

En la segunda parte del trabajo se aplica el método matricial para calcular de las frecuencias propias en una viga. Se idealiza dicha viga como un conjunto de masas unidas por barras elásticas de constante elástica $k= 3EI/L^3$. Se han obtenido resultados bastante aceptables, teniendo en cuenta la simplicidad del modelo (masas unidas por barras elásticas).

2. Ecuaciones que rigen las vibraciones en sistemas monomasa

Todo estudio sobre las vibraciones mecánicas suele comenzar por un detallado análisis de un sistema vibrador ideal compuesto por una masa puntual y un resorte sin masa fijo en un extremo (Figura 2). Aplicando la ecuación fundamental de la dinámica ($\Sigma F = m \cdot a$) llegamos a una ecuación diferencial homogénea cuya solución esta ampliamente estudiada en la bibliografía (French, 1997 y BishoP, Gladwel, *et Al.*, 1979). Además, existen tres variantes, según se considere o no amortiguamientos y perturbaciones periódicas.

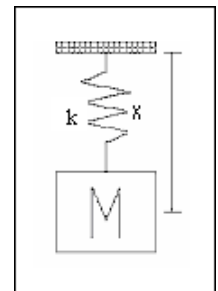


Figura 2.1 Vibrador ideal libre

2.1. Vibración libre

La ecuación diferencial se puede escribir:

$$\begin{aligned} -k \cdot x &= M \cdot x'' \\ M \cdot x'' + k \cdot x &= 0 \\ x'' + \omega_p^2 \cdot x &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ec. 2.1})$$

Donde se ha denominado:

$$\omega_p = \sqrt{k/M}$$

a lo que resultará ser la frecuencia propia (rad/s).

2.2. Vibración amortiguada

La ecuación diferencial se puede escribir:

$$M \cdot x'' + R \cdot x' + k \cdot x = 0$$

$$x'' + 2\omega_r \cdot x' + \omega_p^2 \cdot x = 0 \quad (\text{ec. 2.2})$$

Donde se ha denominado:

$$\omega_p = \sqrt{K/M} \quad \text{que resultará ser la frecuencia propia (rad/s).}$$

$$P = R/2M$$

$$\omega_r = \sqrt{M_p^2 - P^2/M} = \sqrt{K/M - R^2/4M^2}$$

que resultará ser la frecuencia real (rad/s).

2.3. Vibración amortiguada y forzada

La ecuación diferencial se puede escribir:

$$M \cdot x'' + R \cdot x' + k \cdot x = F \cdot \cos(\omega_e t)$$

Haciendo los cambios anteriores y además llamando $f = F/M$.

$$x'' + 2\omega_r \cdot x' + \omega_p^2 \cdot x = f \cdot \cos(\omega_e t) \quad (\text{ec. 2.3})$$

Donde:

M : Masa del cuerpo.

K : Constante elástica del resorte.

R : Constante amortiguamiento viscoso del resorte.

$F \cdot \cos(\omega_e t)$: Fuerza perturbadora periódica de frecuencia ω_e .

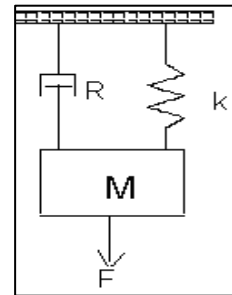


Figura 2.2. Vibrador ideal amortiguado y forzado

2.4. Solución para un sistema libre

La solución para un sistema libre (ec. 2.1) se expresa de cualquiera de las formas:

$$X = a \cdot \cos(\omega_p \cdot T) + b \cdot \text{sen}(\omega_p \cdot T)$$

$$X = X_0 \cdot \cos(\omega_p \cdot T + \alpha)$$

Donde:

$$\omega_p = \sqrt{K/M} \quad \text{es la frecuencia propia del sistema en rad/sg.}$$

a , b , X_0 , son constantes que se determinan por las condiciones iniciales.

2.5. Solución para un sistema amortiguado.

La solución para un sistema amortiguado (ec 2.2) se expresa de la forma:

$$X = e^{-bt} \cdot X_0 \cdot \cos(\omega_p \cdot T) + A \cdot \cos(\omega_{ep} \cdot T + \alpha)$$

Donde:

$$A = \frac{f}{\sqrt{(k - \omega_e^2 \cdot M)^2 + \omega_e^2 \cdot R^2}} \quad \text{es la amplitud, y}$$

$$\omega_r = \sqrt{M_p^2 - P^2} = \sqrt{K/M - R^2/4M^2}$$

es la frecuencia real en rad/sg

2.6. Solución para un sistema forzado

La solución corresponde a un sistema con perturbación periódica y con amortiguamiento (ec. 2.3), es una ecuación muy estudiada en ingeniería, y tiene varias soluciones. El caso más interesante es aquel en que se puede producir resonancia. Esto sucede cuando la frecuencia natural o propia (ω_p) y la frecuencia perturbadora o externa (ω_e) son similares. La solución es entonces de la forma:

$$X = e^{-b \cdot t} \cdot X_0 \cdot \cos(\omega_p \cdot T) + A \cdot \cos(\omega_{ep} \cdot T + \alpha) \quad (\text{ec. 2.4})$$

Donde:

$$A = \frac{f}{\sqrt{(k - \omega_e^2 \cdot M)^2 + \omega_e^2 \cdot R^2}} \quad \text{es la amplitud.} \quad (\text{ec. 2.5})$$

$$\omega_r = \sqrt{M_p^2 - P^2} = \sqrt{K/M - R^2/4M^2}$$

es la frecuencia real (rad/s).

La solución (ec. 2.4) consta de dos sumandos. El primer término es una onda que se amortigua rápidamente debido a la exponencial, se conoce como solución transitoria. Cuando $R > K$ se amortigua rápidamente (movimiento sobreamortiguado). Cuando $K > R$ se amortigua lentamente (movimiento subamortiguado).

El segundo término es una onda de la misma frecuencia que la fuerza perturbadora pero con un desfase respecto a ella, se conoce como solución particular.

La información más interesante está en la amplitud de la solución particular (ec. 2.5) que puede tomar grandes valores, apareciendo el fenómeno conocido como de resonancia.

Para una mejor comprensión, se suele expresar la amplitud de cualquiera de las formas siguientes, según se utilicen como datos *radianes/sg* o *ciclos/sg*.

$$A = \frac{F/M}{\sqrt{(\omega_p^2 - \omega_e^2)^2 + (\omega_e \cdot R/M)^2}}$$

O bien:

$$A = \frac{F/M \cdot \omega_p}{\sqrt{1 + (\omega_e/\omega_p)^4 + (\omega_e/\omega_p)^2 \cdot [(R/M)^2 - 2]}} \quad (\text{ec. 2.6})$$

Se observa que la amplitud (A) toma grandes valores cuando las frecuencias de las fuerzas externa (ω_e) y perturbadora (ω_p), están próximas.

2.7. Conclusiones

De lo expuesto anteriormente se llegan a las siguientes conclusiones:

- Un sistema monomasa vibrando libremente, tiene una frecuencia propia de vibración que depende de sus características físicas (M , K , R , para movimientos de traslación) y se puede calcular mediante la (ec. 2.5).
- Sometido a perturbaciones externas, seguirá un movimiento vibratorio que en la mayoría de los casos será *amortiguado*, y que puede describirse como *superposición de la vibración propia amortiguada más la vibración forzada*.
- Cuando existe una perturbación periódica hay que realizar un estudio dinámico pues, cuando w_p es similar a w_e , aparecen fenómenos de resonancia. Si bien la ecuación del movimiento tiene cierta complejidad (ec. 2.4), es fácil calcular la Amplitud en resonancia mediante la ecuación dada (ec.2.6).

3. Análisis de vibraciones libres en sistemas multimasas

3.1. Modelización Sistemas Reales

Los sistemas reales se pueden modelizar como un conjunto de masas concentradas unidas por elementos elásticos.

Por ejemplo, para estudiar las vibraciones de torsión en líneas de ejes, se suele modelizar el sistema compuesto por el motor, la línea de ejes, los engranajes y otras masas, como un conjunto de volantes de inercia unidos por una barra elástica a la torsión (Espinosa de los Monteros, 1971).

A modo de ejemplo se pretende modelizar una cuerda elástica, como un conjunto de masas unidas por resortes. El objetivo del estudio es describir el método matricial, deducir la forma genérica de las ecuaciones y obtener conclusiones generales (French, 1997).

Aplicando las mismas ecuaciones que para una sola masa resulta el sistema de la fig.3.1:

$$\begin{aligned} my_1'' + Ky_1 - K(y_2 - y_1) &= 0 \\ my_2'' + K(y_2 - y_1) - K(y_3 - y_2) &= 0 \\ my_3'' + K(y_3 - y_2) - K(y_4 - y_3) &= 0 \\ my_4'' + K(y_4 - y_3) - K(y_5 - y_4) &= 0 \\ my_5'' + K(y_5 - y_4) - Ky_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} my_1'' + 2Ky_1 - Ky_2 &= 0 \\ my_2'' - Ky_1 + 2Ky_2 - Ky_3 &= 0 \\ my_3'' - Ky_2 + 2Ky_3 - Ky_4 &= 0 \\ my_4'' - Ky_3 + 2Ky_4 - Ky_5 &= 0 \\ my_5'' - Ky_4 + 2Ky_5 &= 0 \end{aligned}$$

Suponiendo soluciones del tipo: $y_i = a_i \cdot \text{sen}(\omega t)$

La segunda derivada es: $y_i'' = a_i \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t)$

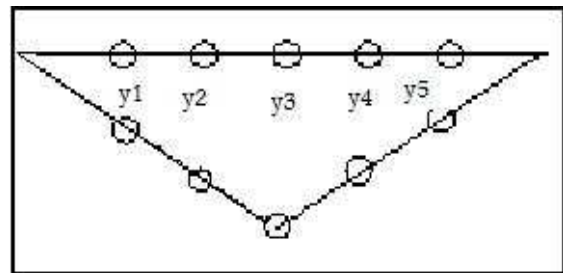


Figura 3.1 Modelo idealizado de cuerda elástica

Sustituyendo e identificando miembro a miembro:

$$\begin{array}{l}
 -ma_1w^2 + 2Ka_1 - Ka_2 = 0 \\
 -ma_2w^2 - Ka_1 + 2Ka_2 - Ka_3 = 0 \\
 -ma_3w^2 - Ka_2 + 2Ka_3 - Ka_4 = 0 \\
 -ma_4w^2 - Ka_3 + 2Ka_4 - Ka_5 = 0 \\
 -ma_5w^2 - Ka_4 + 2Ka_5 = 0
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 (2K-mw^2)a_1 - Ka_2 = 0 \\
 -Ka_1 + (2K-mw^2)a_2 - Ka_3 = 0 \\
 -Ka_2 + (2K-mw^2)a_3 - Ka_4 = 0 \\
 -Ka_3 + (2K-mw^2)a_4 - Ka_5 = 0
 \end{array}$$

El sistema se puede escribir también en forma matricial:

$$\begin{vmatrix} 2K & -K & 0 & 0 & 0 \\ -K & 2K & -K & 0 & 0 \\ 0 & -K & 2K & -K & 0 \\ 0 & 0 & -K & 2K & -K \\ 0 & 0 & 0 & -K & 2K \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1^2 & & & & \\ & w_2^2 & & & \\ & & w_3^2 & & \\ & & & w_4^2 & \\ & & & & w_5^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{vmatrix} = 0$$

Dado que las soluciones han de ser dependientes, las frecuencias se pueden calcular como los valores de w^2 , que hacen cero el determinante. Estos valores se conocen como los autovalores o valores propios de la matriz característica (ec 3.1).

$$\text{Deter. } |K - W^2 M| = 0 \Rightarrow \text{Deter. } |KM^{-1} - W^2| = 0 \quad (\text{ec 3.1})$$

3.2. Conclusiones

De lo anteriormente expuesto se llegan a las siguientes conclusiones:

- Al modelizar un sistema como un conjunto de masas concentradas unidas por elementos elásticos se obtiene una *matriz característica*
- Este tipo de ecuación matricial es muy conocida en álgebra. La matriz anterior $|K - W^2 M|$ contiene mucha la información sobre las posibles formas naturales de vibrar de un sistema multimasa.
- Un sistema con N masas posee N formas y frecuencias naturales de vibrar (w_1, w_2, \dots, w_n). Las frecuencias de vibración son los valores propios de la matriz $|K - W^2 M|$ y se pueden obtener diagonalizando dicha matriz.
- Las amplitudes relativas en resonancia se obtienen resolviendo el sistema $|K - W^2 M|(A) = 0$.
- Para cada forma o modo de vibrar, las amplitudes tienen una distribución característica, que viene dada por los vectores propios de la matriz. Es decir cada *frecuencia propia* w_i , tiene asociado un *vector propio* $\{a_i\} = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ que nos informa sobre las amplitudes básicas de cada masa en el modo o frecuencia "i."

4. Análisis de en sistemas multimasa con amortiguamiento y Fuerza perturbadora

El problema se aborda de forma similar. Aplicando a cada masa la ecuación básica del movimiento considerando fuerza elástica, *f. de amortiguamiento* y *f. externa*, (ec. 2.2), resulta el sistema:

$$\begin{aligned}
My_1'' + R y_1' + Ky_1 - K(y_2 - y_1) &= F_1 \cos(\omega_e t + \Sigma_1) \\
My_2'' + Ry_2' + K(y_2 - y_1) - K(y_3 - y_2) &= F_2 \cos(\omega_e t + \Sigma_2) \\
My_3'' + Ry_3' + K(y_3 - y_2) + K(y_3 - y_4) &= F_3 \cos(\omega_e t + \Sigma_3) \quad (\text{ecs. 4.1}) \\
My_4'' + R y_4' - K(y_3 - y_4) + K(y_4 - y_5) &= F_4 \cos(\omega_e t + \Sigma_4) \\
My_5'' + Ry_5' - K(y_4 - y_5) + Ky_5 &= F_5 \cos(\omega_e t + \Sigma_5)
\end{aligned}$$

La solución para una masa venía dada por la (ec. 2.4). Sustituir dicha ecuación y sus derivadas en el sistema anterior, da lugar a un sistema muy complejo. Se suelen hacer las siguientes simplificaciones:

- Suponer el movimiento en estado estacionario, olvidándose de la situación transitoria. Esto es razonable pues la solución transitoria se amortigua rápidamente.
- Suponer que el sistema vibrará a la frecuencia de la fuerza perturbadora. Esto también parece razonable pues trascurrido el periodo transitorio, la forma básica de vibrar la imponen las F . externas. Además el caso que realmente interesa es aquel en que las frecuencias externas son iguales o próximas a las naturales y por tanto hay resonancia.
- Suponer que aparecen desfases, es decir que no todas las masas alcanzan la amplitud en el mismo instante. Este es un hecho comprobado cuando hay amortiguamientos y fuerzas externas, y que habíamos omitido en el caso del sistema libre.

Por tanto, la ecuación que representa la solución para una masa, debe contener ahora un desfase: $y = a \cdot \text{sen}(\omega t + \beta)$. Se suele utilizar la notación compleja para sistematizar el cálculo, (Espinosa de los monteros, 1971 y Bishop, Gladwel, et al., 1979). La solución será de la forma: $y = (a + bj)e^{j\omega t}$. Por idéntico motivo las fuerzas perturbadoras se expresan de la forma $f = (c + dj) e^{j\omega t}$.

El significado de esta solución es el siguiente. La amplitud de la onda viene dada por el módulo del complejo, y el desfase por el argumento del complejo. La parte exponencial expresa la evolución temporal y desaparecerá al sustituirla en el sistema de ecuaciones. La solución y sus derivadas son entonces de la forma:

$$\begin{aligned}
y_i &= (a + bj)e^{j\omega t} \\
y_i' &= \omega(-b + aj)e^{j\omega t} \\
y_i'' &= -\omega^2(a + bj) e^{j\omega t}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en el sistema de ecuaciones (ec. 4.1) e igualando parte real e imaginaria se obtiene dos sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{vmatrix} 2K - m\omega^2 & -K & 0 & 0 \\ -K & 2K - m\omega^2 & -K & 0 \\ 0 & -K & 2K - m\omega^2 & -K \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r\omega \\ r\omega \\ r\omega \\ \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2K - m\omega^2 & -K & 0 & 0 \\ -K & 2K - m\omega^2 & -K & 0 \\ 0 & -K & 2K - m\omega^2 & -K \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r\omega \\ r\omega \\ r\omega \\ \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \end{vmatrix} = 0$$

En notación matricial abreviada:

$$\begin{aligned}
(|K| - |M| |W^2|)(A) - |R| |W|(B) &= (C) \\
(|K| - |M| |W^2|)(B) - |R| |W|(A) &= (D)
\end{aligned} \quad (\text{ecs. 4.2})$$

Con este sistema se pueden calcular con bastante aproximación, las frecuencias próximas a las de resonancia, las amplitudes de vibración de las masas, y los desfases que aparecen.

5. Aplicación del método matricial al estudio de las frecuencias de una viga en voladizo

Con objeto de comprobar la validez del modelo matricial anteriormente expuesto, lo hemos aplicado a una viga en voladizo, idealizándola como un conjunto de masas unidas por resortes. Por resistencia de materiales sabemos (Weaver, Timoshenko, Young, 1990) que la flecha máxima de una viga con una fuerza p aplicada en el extremo es:

$$y = \frac{1}{3} \frac{pl^3}{EI}$$

Se tiene por tanto una ecuación equivalente a la ley de Hook. Como la fuerza es recuperadora debería llevar signo negativo:

$$p = -k \cdot y$$

Siendo:
$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

Se puede idealizar la viga como un conjunto de masas unidas por resortes según la fig. 3.3. Se procede a deducir de forma genérica para cualquier nodo "j", una expresión para los Δy_j en función de las coordenadas del nodo anterior "i" (y_i) y del nodo en estudio "j" (y_j) (Guerrero, Valderrábanos, 1999).

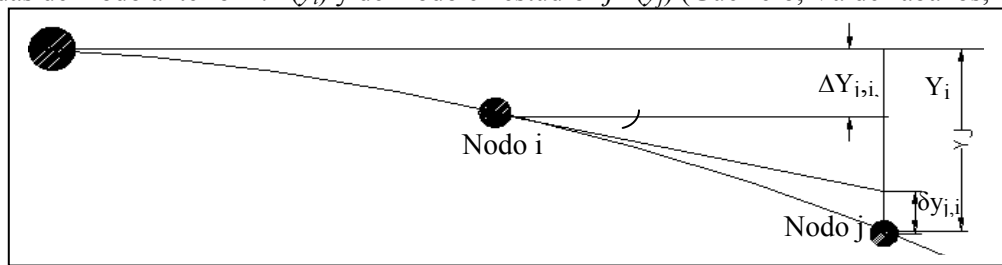


Figura 3.3. Viga idealizada utilizando masas unidas por resortes.

Por resistencia de materiales conocemos la expresión de la flecha máxima (Y_i) y de la pendiente máxima (α_i) de una viga en voladizo.

$$Y_i = \frac{P_i \cdot L_i^3}{3EI} \qquad \text{tg } \alpha_i = \frac{P_i \cdot L_i^2}{2EI}$$

Se desconoce el valor de la fuerza aplicada (P_i), que provoca la deformación existente en el nodo 'i', pero este término desaparecerá. Expresando la distancia al nodo 'i' (L_i) en función de la distancia entre las masas (l_i).

$$L_i = i \cdot l_i \qquad y_i = \frac{P_i i^3 \cdot l_i^3}{3EI} \qquad \text{tg } \alpha_i = \frac{P_i i^2 \cdot l_i^2}{2EI}$$

Sustituyendo se obtiene:
$$\text{tg } \alpha_i = \frac{3 y_i}{2 i l_i}$$

Observando la figura 3.3, podemos deducir que el incremento de 'y' debido a la pendiente que el nodo 'i' provoca en el nodo 'j' es

$$\Delta y_{j,i} = l_i \cdot \text{tg } \alpha_i = \frac{3 y_i l_i}{2 i} \qquad \Delta \cdot y_{j,i} = \frac{3 y_i}{2 i}$$

De donde se llega a que la deformación en cada nodo es:

$$\delta y_{j,i} = y_j - y_i - \Delta y_{j,i} = y_j - y_i - \frac{3y_i}{2i}$$

Simplificando un poco

$$\delta y_{j,i} = y_j - y_i \frac{2i + 3}{2i} \quad (\text{ec. 5.1})$$

Se procede a deducir ahora las ecuaciones básicas de cada masa empezando por la 2ª pues la 1ª la consideramos empotrada. El signo ‘-’ proviene de que la fuerza es recuperadora. La fuerza elástica en cada masa es proporcional a la deformación δ :

$$\begin{array}{lcl} my_2'' + Ky_2 - K\delta y_3 = 0 & \text{Pero} & -mw^2 a_2 + Ka_2 - K\delta a_{3,2} = 0 \\ my_3'' + K\delta y_3 - K\delta y_4 = 0 & y_i = a_i \cdot \text{sen}(wt) & -mw^2 a_3 + K\delta a_3 - K\delta a_{4,3} = 0 \\ my_4'' + K\delta y_4 - K\delta y_5 = 0 & y_i'' = -a_i \cdot w^2 \cdot \text{sen}(wt) & -mw^2 a_4 + K\delta a_4 - K\delta a_{5,4} = 0 \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ my_n'' + K\delta y_n = 0 & & -mw^2 a_n + K\delta a_{n,n-1} = 0 \end{array} \quad (\text{ecs. 5.2})$$

Se procede a sustituir ahora los $\delta a_{j,i}$ en función de la a_i según la ecuación deducida anteriormente (ec 5.1)

$$\delta a_{j,i} = a_j - a_i \frac{2i + 3}{2i}$$

La 1ª ecuación del sistema (ecs 5.2) quedaría:

$$-mw^2 a_2 + ka_2 - ka_3 + \frac{7}{4}ka_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{11}{4}k - mw^2\right)a_2 - ka_3 + = 0$$

Haciendo lo mismo con las demás ecuaciones, llegamos a un sistema similar al deducido para la cuerda vibrante. La matriz característica es en este caso:

$$\begin{vmatrix} 7K/2 - mw^2 & -K & 0 & 0 & 0 \\ -5K/2 & 11K/4 - mw^2 & -K & 0 & 0 \\ 0 & -7K/4 & 15K/6 - mw^2 & -K & 0 \\ 0 & 0 & -9K/6 & (4i+3)K/2i - mw^2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & (2i+3)K/2i & \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \dots \\ a_i \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ecs.5.3})$$

Se puede multiplicar todas las filas por una constante sin alterar el valor del determinante, en concreto 1/k.

Además llamamos: $\lambda = w^2 \cdot m/k$ (ec 5.4)

La matriz característica queda:

$$\begin{vmatrix} 7/2 - \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5/2 & 11/4 - \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7/4 & 15/6 - \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -9/6 & (4i+3)/2i - \lambda & \dots \\ 0 & 0 & 0 & (2i+3)/2i & \dots \end{vmatrix} \quad (\text{ecs.5.5})$$

Una vez calculados los autovalores λ de la matriz anterior, las frecuencias propias w_i se pueden calcular deshaciendo el cambio propuesto en (ec. 5.3):

$$\omega^2 = \lambda k/m \quad (\text{ec. 5.6})$$

Se ha trabajado con masas y longitudes elementales de valor l y m ; pero deseamos expresar la frecuencia en función de las totales: M_t y L_t :

$$M_t = n.m \quad L_t = (n-1).l$$

Además:

$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

Sustituyendo en (ec.5.6), tenemos una expresión para las frecuencias propias en función de M_t y L_t .

$$\omega_i^2 = \frac{\lambda_i k}{m} = 3 \cdot \lambda_i \cdot n (n - 1)^3 \frac{EI}{L_t^3 M_t}$$

Si se agrupan las constantes en una sola ecuación:

$$(\text{ec. 5.7})$$

Por $Ct_i = \sqrt{\lambda_i 3 \cdot n (n - 1)^3}$ tanto las constantes Ct_i se obtienen, para cada sistema, a partir de los autovalores λ , de la matriz característica de (ecs. 5.5)

Por tanto las frecuencias propias de una viga en voladizo pueden calcularse como:

$$\omega_i = Ct_i \sqrt{\frac{EI}{M_t L_t^3}} \quad (\text{método matricial}) \quad (\text{ec 5.8})$$

Que coincide sustancialmente con la ecuación generalmente admitida para el 1º modo de vibrar, que se calcula por el método de la energía (Weaver, Timoshenko, Young, 1990).

$$\omega = 3 \cdot 567 \sqrt{\frac{EI}{M_t L_t^3}} \quad (\text{método de la energía})$$

3,915	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,005
-2,915	2,914	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,267
0	-1,914	2,579	-1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,782
0	0	-1,579	2,412	-1,000	0,000	0,000	0,000	1,491
0	0	0	-1,412	2,312	-1,000	0,000	0,000	2,310
0	0	0	0	-1,312	2,246	-1,000	0,000	3,130
0	0	0	0	0	-1,246	2,200	-1,000	3,850
0	0	0	0	0	0	-1,200	1,000	4,400

Tabla 6.1. Matriz asociada y autovalores, para viga de 8 masas.

6. Resultados

Se ha procedido a calcular los autovalores (λ) a partir de la matriz del sistema, para distintos números de masas. La matriz para 8 masas y los autovalores se reflejan en la Tabla 6.1.

Los resultados obtenidos para la constante Ct se recogen en la Tabla 2, y guardan similitudes con los obtenidos por otros modelos propuestos en la bibliografía (Steidel, 1989). También se puede comprobar que a medida que se aumenta en número de masas, aumentan también las diferencias con los valores normalmente admitidos, discrepancia que se observa también con otros modelos.

Para 5 masas			Para 8 masas			Valores Teóricos (Steidel, 1989)	
modo	λ	Ct	modo	λ	Ct	modo	Ct
1°	0,02	4,8	1°	0,005	7,6	1°	3,51
2°	0,86	28,7	2°	0,267	57	2°	22,03
3°	2,33	47,2	3°	0,782	98,	3°	61,70
4	2,9	80,1	4	1,491	135	4°	120,91

Tabla 6.2. Comparativa de resultados obtenidos por el modelo matricial y los teóricos admitidos

7. Conclusiones

Se ha idealizado una viga en voladizo como un conjunto de masas y resortes. Aplicando sistemáticamente el método matricial, llegamos a la forma general de la matriz característica (ecs.5.5) que nos permite calcular para cada caso los autovalores (Tabla 6.2). También hemos llegado a una ecuación para el cálculo de las frecuencias propias (ec.5.8) que presenta la misma forma genérica que la obtenida por otros métodos, en particular por el método de la Energía. La constante que aparece en la ecuación toma distintos valores que dependen del modo de vibrar, y se puede calcular a partir de los autovalores de la matriz característica.

Los resultados obtenidos para la constante Ct (Tabla 6.2), guardan similitudes con los obtenidos en otros modelos propuestos para vigas simples en la bibliografía. Las diferencias las atribuimos fundamentalmente a la simplicidad del modelo aquí expuesto y a las diversas variantes para la simulación de las condiciones iniciales (grado de empotramiento, etc.) que se toman en los modelos consultados.

Se puede concluir por tanto que el modelo expuesto proporciona una aceptable aproximación para el cálculo de las primeras frecuencias propias de vibración en sistemas multimasa, con la ventaja de utilizar un aparato matemático relativamente asequible.

8. Bibliografía

- ESPINOSA DE LOS MONTEROS, Ignacio (Marzo 1971): “*Obtención de esfuerzos específicos en las críticas de torsión por ecuaciones en matrices complejas*”; Revista Ingeniería Naval.
- GUERRERO, Martha, VALDERRÁBANOS, Sergio, *et Al.* (Nº Enero-Abril 1999): “*Aplicación del método e elementos finitos al análisis nodal*”; Revista Ingenierías.
- FRENCH, P. (1997): “*Vibraciones y Ondas*”. Reverte 3ª Edición.
- BISHOP, R.E.D.; GLADWEL, G.M.L.; *et Al.* (1979); “*The Matrix Analysis of Vibration*” Cambridge U. Press.
- F. STEIDEL, Robert Jr. (1989): “*An Introducción to Mechanical Vibrations*”; John Wiley & Sons; 3ª Edición.
- WEAVER, W., TIMOSHENKO, S.P., YOUNG, D.H. (1990): “*Vibration Problems In Engineering*”; Wiley Interscience 5ª Edición.