Determinación de la hora de la muerte de un individuo mediante ecuaciones diferenciales.

Hernán Córdoba Córdoba
Ingeniería de Sistemas
Corporación Tecnológica Industrial Colombiana
hernancordoba@galaxso.net

Resumen
En el presente documento, se desarrollará un modelo matemático para determinar la hora de muerte de un individuo que fue asesinado. Esto se determinará usando ecuaciones diferenciales de primer orden, más precisamente se utilizará la transformada de Laplace. Se entenderá la importancia de las ecuaciones diferenciales para modelar gran cantidad de fenómenos que se presentan en la naturaleza.

Palabras claves: Transformada, Laplace, Diferencial.

Summary
This paper will develop a mathematical model to determine the time of death of an individual who was killed, it's determined using first order differential equations, more precisely using the Laplace transform. Means the importance of differential equations to model the many phenomena observed in nature.

Keywords: Transform, Laplace, Diferential.

TEMÁTICA

Determinar la hora exacta en que una persona ha muerto es una de las principales tareas del investigador criminalista. En los últimos años las investigaciones en el tema han llevado a la solución de este problema mediante la modelación matemática, esto implica una preparación académica importante en matemáticas de las personas involucradas en la investigación criminalística. Existen varios métodos para hallar dicha solución, sin embargo, unos de los más sencillos y eficientes es el uso de ecuaciones diferenciales.

El dueño de un restaurante, Joe Wood fue encontrado muerto en el refrigerador en la entrada del sótano. Un detective investiga el crimen; él desea determinar la hora exacta en la que el individuo murió.

Modelaremos el problema usando ecuaciones diferenciales ordinarias.

Se hará corresponder las 6:00 a.m. con t=0 y tomaremos t=1 como las 5:00 a.m. En t=0 la temperatura es 85°F y t=-1/2 equivale a media hora después con 84ºF Estas condiciones son determinadas por el investigador ya que la temperatura del refrigerador es de 50ºF.

PROPIEDADES

Las propiedades que se tendrán en cuenta en este documento son:

Linealidad de la Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}(af(t)+bg(t)) = a\,\mathcal{L}(f(t)) + b\,\mathcal{L}(gt))$$

Desplazamiento de la frecuencia.

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s-a)$$

Convolución.

$$\mathcal{L}(f(t)*g(t)) = \mathcal{L}(f(t))\,\mathcal{L}(g(t))$$

MODELAMIENTO MATEMÁTICO

Para determinar la muerte del individuo planteamos y solucionamos la siguiente ecuación diferencial.

$dT/dt = k(T-T_m)$ donde T: representa la temperatura del cuerpo en el instante t y T_m: la temperatura del entorno en el instante t.

Teniendo en cuenta las condiciones anteriores, se obtiene,

$dT/dt = k(85-50)$, $dT/dt = 35k$

Por tanto, $T(t) = 35kt+C$

Usando la condición inicial se tiene,

$$T(-1/2) = 35k(-1/2)+C = 84$$

Esto es,

$$C = 84+(35/2)k$$

Por otro lado,

$$T(0) = 35(0)k+C = 85$$

Entonces, $C = 85$

$85 = 84+(35/2)k$

De donde,

$k = 2/35$

Reemplazando en la ecuación

$T(t) = 35kt+C$

se tiene,

$T(t) = 2t+85$

Claramente para

$t = -1/2,$

se tiene $T(-1/2) = 2(-1/2)+85 = 84$

Pues, 84°F fue la temperatura que el investigador obtuvo a las 6:30 a.m.

Para la solución del problema consideremos 98.6°F como la temperatura normal del ser humano.

Por tanto,

$T(t) = 2t+85=98.6$

Esto es, $t = 6.8$ horas.

Concluimos que el individuo murió aproximadamente a las 11:12 p.m.

El detective determino que la temperatura del entorno en el instante t es de 70ºF que es la temperatura ambiente y está dada por la función

$Tm(t)=50+20u(t-h)$

Donde *u* es la función escalón unitario y *h* número de horas que el cuerpo a estado en el refrigerador antes de las 6:00 a.m. es decir, h=5 significa que el cuerpo fue movido al refrigerador a las 01:00 a.m.

Mediante la Transformada de Laplace se resolverá la siguiente ecuación,

$dT/dt = k (T-Tm(t))$

$T' = kT-kTm$

$\mathcal{L}(T') - k\ \mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(kTm)$

$st(s)-t(0)-kt(s) = -50k/s-20kL(u(t-h))$

Esto es,

$t(s) = 1/(s-k)(85-(k/s)50-20(k/s)e^{\wedge}(-hs)$

Ahora, la transformada inversa para hallar T.

$\mathcal{L}^{-1} T(t)= \mathcal{L}^{-1}(t(s))$

$=\mathcal{L}^{-1} (1/(s-k)(85-(k/s)50-20(k/s)e^{\wedge}(-hs))$

$=\mathcal{L}^{-1} (1/(s-k) 85) - \mathcal{L}^{-1} (1/(s-k) (k/s)50) - \mathcal{L}^{-1} (1/(s-k) 20(k/s) e^{\wedge}(-hs)))$

Aplicando las propiedades de la transformada inversa de Laplace, se tiene,

$T(t) = (85-50k-20ku(t-h))e^{\wedge}kt$

Por otro lado, es posible dado un valor para h encontrar la hora de la muerte. Estos datos aparecen en la tabla 1.

Horas (h)	Hora en que el cuerpo fue movido	Hora de la muerte
12	6:00 p.m.	4:59 p.m.
11	7:00 p.m.	5:00 p.m.
10	8:00 p.m.	5:00 p.m.
9	9:00 p.m.	7:01 p.m.
8	10:00 p.m.	9:25 p.m.
7	11:00 p.m.	10:37 p.m.
6	12:00 a.m.	11:12 p.m.
5	1:00 a.m.	11:04 p.m.
4	2:00 a.m.	10:56 p.m.
3	3:00 a.m.	10:43 p.m.
2	4:00 a.m.	10:22 p.m.
1	5:00 a.m.	10:17 p.m.

Tabla 1. Datos hora de la muerte.

La razón por la cual para valores grandes de h, la hora de la muerte es la misma aproximación, se debe a que la temperatura corporal después de permanecer varias horas en un refrigerador tiende a ser constante en el tiempo.

EXPLICACIÓN

El modelo matemático diseñado para la resolución de este problema está basado en la aplicación de la Transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales. Inicialmente, se halla el valor de k, la cual es la constante de proporcionalidad de Newton, posteriormente, se determina el valor de t, donde t=0 corresponde a las 6:00 a.m. y para horas menores a esta se toma con t positivo. De esta manera se determina que la hora de la muerte es 11:12 p.m. por otro lado, se usa la transformada de Laplace para determinar la solución cuando h varia, es decir, se busca saber que cambios hay en la hora de la muerte hallada inicialmente dependiendo de que tanto tiempo duro el cuerpo en el refrigerador.

CONCLUSIONES

- Posibilidad de resolver cualquier problema de temperatura, usando la Transformada de Laplace, dados unos datos iniciales.
- Menor probabilidad de cometer errores al condenar al sospechoso de cometer el crimen.
- Resolución de un problema real mediante modelamiento matemático con ecuaciones diferenciales.
- Aplicación de la transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales para resolver el crimen.
- Determinación de la hora de la muerte para cualquier valor h que se tome.
- El aprovechamiento de análisis matemáticos en aras de observación e investigación científica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] J. Escobar, "*Ecuaciones diferenciales con Aplicaciones en Maple"*. Universidad de Antioquia. Medellín. 2004

[2] D. Zill, *"Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado"*. Internacional Thomnson, 6ª Edición. 1997.

[3] D. Zill, *"Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera"*. Internacional Thomnson, 6ª Edición. 2006.